Yoo-Jin Azad (yoo-jin.jeong@kit.edu)
Daniel Reichard (reichard@kit.edu)

Musterlösung zu Übungsblatt 5

Bildverarbeitung

Aufgabe 5.1 – Morphologische Operatoren

5.1.a

$$\begin{matrix} 255 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 255 \end{matrix}$$

5.1.a

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

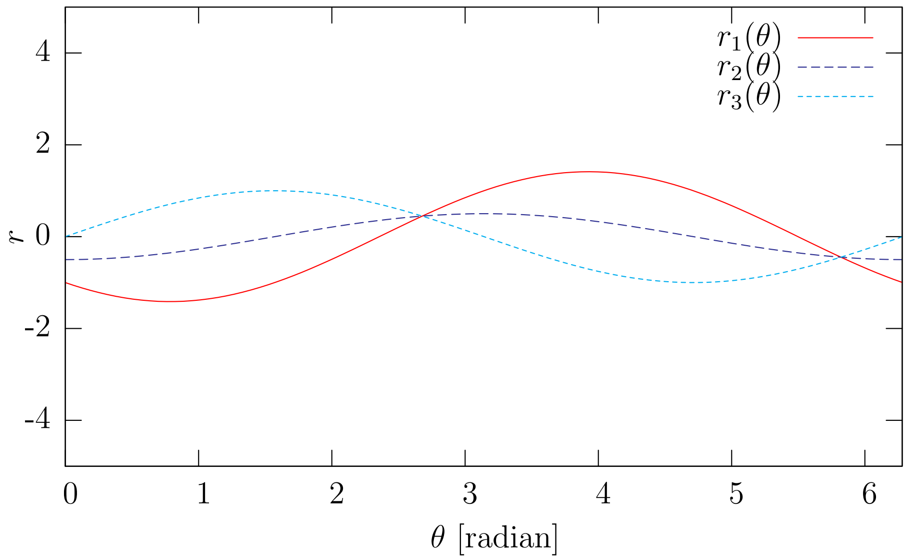
Onlinefrage Nr. 1:
Die Summe der mit X markierten Elemente beträgt 2295.

Aufgabe 5.2 – Punkte ⇒ Geraden

5.2.a

$$\begin{aligned} P_1: \quad r_1 &= -\cos\theta - \sin\theta \\ P_2: \quad r_2 &= -0.5\cos\theta \\ P_3: \quad r_3 &= \sin\theta \end{aligned}$$

Im Hough-Diagramm lässt sich als θ-Koordinate des Schnittpunktes mit $0 \leq \theta < \pi$ in etwa der Wert 2.7 ablesen.



Als r lässt sich z.B. $r_3 = \sin\theta \approx \sin 2.7 \approx 0.43$ heranziehen. Ferner gilt $\cos 2.7 \approx -0.90$ und somit gilt:

$$g : \begin{pmatrix} -0.90 \\ 0.43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.43$$

Ein Aufpunktsvektor kann berechnet werden, indem beispielsweise $x = 0$ eingesetzt wird. Somit gilt (Richtungsvektor verläuft senkrecht zum Normalenvektor):

$$g : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0.43 \\ 0.90 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Die exakte Lösung des Schnittes lässt sich berechnen zu (da in diesem Fall leicht zu sehen ist, dass die exakt durch die Punkte P_1, P_2, P_3 verlaufende Gerade die Steigung 2 besitzt):

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2} + \arctan(2) \approx 2.6779450445889 87 \\ r &= r_3 = \sin\theta \approx 0.447213595499959 \end{aligned}$$

5.2.b

Ein Kreis mit Mittelpunkt (u_m, v_m) und Radius r lässt sich als lineare Gleichung wie folgt formulieren:

$$a_1\,(u^2 + v^2) + a_2\,u + a_3\,v + a_4 = 0$$

mit:

$$\begin{aligned} u_m &= -\frac{a_2}{2a_1} \\ v_m &= -\frac{a_3}{2a_1} \\ r &= \sqrt{\left|u_m^2 + v_m^2 - \frac{a_4}{a_1}\right|} \end{aligned}$$

Es kann o.B.d.A. $a_1 = 1$ angenommen werden. Somit erhält man als Ausgangsbasis für die Formulierung des überbestimmten LGS:

$$a_2\, u + a_3\, v + a_4 = -u^2 - v^2$$

Das überbestimmte LGS lautet dann für eine Menge von Pixeln $\{\mathbf{x}_i = (u_i, v_i)\}$ mit $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $n \geq 3$:

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n & v_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1^2 - v_1^2 \\ \vdots \\ -u_n^2 - v_n^2 \end{pmatrix}$$

5.2.c

Die Bestimmung der Regressionsgerade ist das geeignetere Verfahren, wenn schon klar ist, welche Pixel eine Gerade bilden sollen; dann ist die Regressionsgerade die optimale Gerade im Sinne der Summe der Fehlerquadrate. Die Regressionsgerade kann jedoch keine Segmentierung vornehmen. Dahingegen lassen sich mit der Hough-Transformation in beliebigen Bildern geradlinige Strukturen erkennen; die Punkte dazu müssen dazu jedoch verhältnismässig exakt auf einer Linie liegen.

Onlinefrage Nr. 2:
$\theta \approx 2.7$.

Aufgabe 5.3 – Korrelation

5.3.a

$$\begin{aligned} SAD(A, B_1) &= 3 \cdot 90 = 270 \\ SAD(A, B_2) &= 180 \end{aligned}$$

Als Korrespondenz wird folglich B_2 bestimmt.

5.3.b

$$\begin{aligned} SSD(A, B_1) &= 3 \cdot 90^2 = 24300 \\ SSD(A, B_2) &= 180^2 = 32400 \end{aligned}$$

Als Korrespondenz wird folglich B_1 bestimmt.

5.3.c

$$\begin{aligned} \overline{A} &= 40 \\ \overline{B_1} &= 70 \\ \overline{B_2} &= 60 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
ZNCC(A,B_1) &= \frac{6\cdot(-40)\cdot(-70)+3\cdot 80\cdot 140}{\sqrt{6\cdot 40^2+3\cdot 80^2}\sqrt{6\cdot 70^2+3\cdot 140^2}} = \frac{50400}{\sqrt{28800\cdot 88200}} = 1 \\
ZNCC(A,B_2) &= \frac{5\cdot(-40)\cdot(-60)+3\cdot 80\cdot 60+(-40)\cdot 120}{\sqrt{6\cdot 40^2+3\cdot 80^2}\sqrt{8\cdot 60^2+120^2}} = \frac{21600}{\sqrt{28800\cdot 43200}} \approx 0.61
\end{aligned}
$$

Als Korrespondenz wird folglich B_1 bestimmt.

Onlinefrage Nr. 3:
Das Ergebnis der Korrelation in Teilaufgabe 5.3.c für die berechnete Korrespondenz B_1 beträgt 1.

Aufgabe 5.4 – 3D-Transformationen

5.4.a

$$
\begin{aligned}
R_{X'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma) &= R_X(\alpha)\cdot R_Z(\beta)\cdot R_Y(\gamma) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ s\beta & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma & 0 & s\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\gamma & 0 & c\gamma \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ c\alpha s\beta & c\alpha c\beta & -s\alpha \\ s\alpha s\beta & s\alpha c\beta & c\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma & 0 & s\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\gamma & 0 & c\gamma \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c\beta c\gamma & -s\beta & c\beta s\gamma \\ c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{X'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma)^{-1} &= R_{X'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma)^T \\
&= \begin{pmatrix} c\beta c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\alpha c\beta & s\alpha c\beta \\ c\beta s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

5.4.b

$$
R_{YZX}(\gamma,\beta,\alpha) = R_X(\alpha)\cdot R_Z(\beta)\cdot R_Y(\gamma) = R_{X'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma) \quad \text{(s. 5.4.a)}
$$

Aufgabe 5.5 – Kameramodell

5.5.a

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= R_1\mathbf{x}_w + \mathbf{t_1} \\
\mathbf{x}_2 &= R_2\mathbf{x}_w + \mathbf{t_2}
\end{aligned}
$$

Dementsprechend gilt für die inverse Transformation:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_w &= R_1^T\mathbf{x}_1 - R_1^T\mathbf{t}_1\\ \mathbf{x}_w &= R_2^T\mathbf{x}_2 - R_2^T\mathbf{t}_2\end{aligned}$$

Die Projektionszentren der Kameras haben jeweils in ihrem eigenen Koordinatensystem den Nullvektor als Ortsvektor. Somit gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{1,w} &= R_1^T\mathbf{0} - R_1^T\mathbf{t_1} = -R_1^T\mathbf{t}_1\\ \mathbf{c}_{2,w} &= R_2^T\mathbf{0} - R_2^T\mathbf{t_2} = -R_2^T\mathbf{t}_2\end{aligned}$$

Und schließlich:

$$\overrightarrow{C_1C_2}_w = \mathbf{c}_{2,w} - \mathbf{c}_{1,w} = R_1^T\mathbf{t}_1 - R_2^T\mathbf{t}_2$$

5.5.b

Wenn das neue Weltkoordinatensystem identisch mit dem Kamerakoordinatensystem der Kamera K_1 sein soll, dann gilt:

$$\begin{aligned}R_1' &= I\\ \mathbf{t}_1' &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Gesucht ist nun für $R_2', \mathbf{t}_2'$ die Koordinatentransformation vom Kamerakoordinatensystem der Kamera K_1 in das Kamerakoordinatensystem der Kamera K_2. Diese lässt sich über das alte Weltkoordinatensystem wie folgt berechnen. Es gilt (s. 5.5.a):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_w &= R_1^T\mathbf{x}_1 - R_1^T\mathbf{t}_1\\ \mathbf{x}_2 &= R_2\mathbf{x}_w + \mathbf{t_2}\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{x}_2 = R_2R_1^T\mathbf{x}_1 - R_2R_1^T\mathbf{t}_1 + \mathbf{t_2}$$

Und somit gilt:

$$\begin{aligned}R_2' &= R_2R_1^T\\ \mathbf{t}_2' &= \mathbf{t_2} - R_2R_1^T\mathbf{t}_1\end{aligned}$$

Für die Ortsvektoren der Projektionszentren im neuen Weltkoordinatensystem gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{1,w'} &= \mathbf{0}\\ \mathbf{c}_{2,w'} &= R_2'^T\mathbf{0} - R_2'^T\mathbf{t}_2' = -R_2'^T\mathbf{t}_2'\\ &= -(R_2R_1^T)^T(\mathbf{t_2} - R_2R_1^T\mathbf{t}_1)\\ &= R_1R_2^T(R_2R_1^T\mathbf{t}_1 - \mathbf{t_2})\\ &= \mathbf{t}_1 - R_1R_2^T\mathbf{t_2}\end{aligned}$$

Und schließlich:

$$\overrightarrow{C_1C_2}_{w'} = \mathbf{c}_{2,w'} - \mathbf{c}_{1,w'} = \mathbf{t}_1 - R_1R_2^T\mathbf{t_2}$$

5.5.c

$$T = \begin{pmatrix} & R & & \mathbf{t} \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} & R^T & & -R^T\mathbf{t} \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Onlinefrage Nr. 4:
Das Ergebnis lautet $R_1^T\mathbf{t}_1 - R_2^T\mathbf{t}_2$***.***

Aufgabe 5.6 – Epipolargeometrie

5.6.a

Wie in Aufgabe 3.1.a berechnet, ist der Umrechnungsfaktor von [mm] nach [Pixel] $100\frac{\text{Pixel}}{\text{mm}}$. Die Brennweite ist gegeben mit $f = 5$ mm. Daraus folgt: $f_x = f_y = 5 \text{ mm} \cdot 100 \ \frac{\text{Pixel}}{\text{mm}} =$ 500 Pixel. Somit gilt für die Kalibriermatrizen K, K' (Einheit ist [Pixel]):

$$K = K' = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 320 \\ 0 & 500 & 240 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die extrinsischen Parameter gilt (Einheit für die translativen Parameter ist [mm]):

$$\begin{aligned} R_1 &= I, \ \mathbf{t}_1 = \mathbf{0} \\ R_2 &= I, \ \mathbf{t}_2 = (-100 \ 0 \ 0)^T \end{aligned}$$

Die Projektionsmatrizen lauten dann:

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} 500 & 0 & 320 & 0 \\ 0 & 500 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ P_2 &= \begin{pmatrix} 500 & 0 & 320 & -50000 \\ 0 & 500 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.6.b

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \\ 0 & -100 & 0 \end{pmatrix}$$

Um die Fundamentalmatrix F auf der Basis der Essentialmatrix E zu berechnen, muss zunächst $K_1^{-1} = K_2^{-1}$ berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 500 & 0 & 320 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 240 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 500 & 0 & 0 & 1 & 0 & -320 \\ 0 & 500 & 0 & 0 & 1 & -240 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{500} & 0 & -\frac{16}{25} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{500} & -\frac{12}{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\Rightarrow K_1^{-1} = K_2^{-1} \quad = & \begin{pmatrix} \frac{1}{500} & 0 & -\frac{16}{25} \\ 0 & \frac{1}{500} & -\frac{12}{25} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die Fundamentalmatrix lässt sich nun wie folgt berechnen:

$$
\begin{aligned}
F &= K_2^{-T} E K_1^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{500} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{500} & 0 \\ -\frac{16}{25} & -\frac{12}{25} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \\ 0 & -100 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{500} & 0 & -\frac{16}{25} \\ 0 & \frac{1}{500} & -\frac{12}{25} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -100 & -48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{500} & 0 & -\frac{16}{25} \\ 0 & \frac{1}{500} & -\frac{12}{25} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Für die Epipole gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= -K_1 R^T \mathbf{t} = -\begin{pmatrix} 500 & 0 & 320 \\ 0 & 500 & 240 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{e}_2 &= K_2 \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 320 \\ 0 & 500 & 240 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Division durch die w-Komponente des Ergebnisses bedeutet eine Division durch Null. D.h. die Epipole liegen im Unendlichen auf der u-Achse, weshalb alle Epipolarlinien horizontal verlaufen.

5.6.c

$$
\mathbf{l}_2 = F \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ -60 \end{pmatrix}
$$

Onlinefrage Nr. 5:
Das Ergebnis lautet $(0 \ \frac{1}{5} \ -60)^T$***.***